Tema 1: Conjuntos. Relaciones. Funciones. Estructuras algebraicas

I. INTRODUCCIÓN

TIPOS DE RESULTADOS MATEMÁTICOS

1) *Axiomas (o postulados):* Resultados que no es posible demostrar, y a partir de las cuales se desarrollan las teorías.
2) *Teoremas:* Resultados importantes.
3) *Proposiciones:* Resultados menos importantes
4) *Lemas:* Resultados que ayudan a demostrar un teorema
5) *Corolarios:* Resultado deducido a partir de un teorema

MÉTODOS DE DEMOSTRACIÓN

Si se quiere demostrar que P (*hipótesis*) $\Rightarrow Q$ (*tesis*), procedemos, por lo general:

1.- Demostración directa:

Si se quiere demostrar que $P \Rightarrow Q$, intentamos buscar una cadena de razonamientos tales que nos conduzcan a Q, esto es, $P \Rightarrow P_1 \Rightarrow P_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow P_{j-1} \Rightarrow P_j \Rightarrow P_{j+1} \Rightarrow \ldots \Rightarrow Q$

Ejemplo 1: Demostrar que el cuadrado de un número impar es impar.

En ocasiones, si no podemos llegar a Q ($P \Rightarrow P_1 \Rightarrow P_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow P_{j-1} \Rightarrow P_j \Rightarrow$?), es conveniente obtener razonamientos recíprocos de Q ($P_j \Rightarrow P_{j+1} \Rightarrow \ldots \Rightarrow Q$) llegando a un nexo común.

Ejemplo 2: Demostrar que $n\cdot(n^2 + 5)$ es divisible por 6.

2.- Por contradicción o reducción al absurdo:

Si se quiere demostrar que $P \Rightarrow Q$, podemos demostrar en su lugar que $\sim Q \Rightarrow \sim P$ (*esto es, no $Q \Rightarrow$ no P*)

Ejemplo 3: Demostrar que existen infinitos números primos.

3.- Por inducción:

Si se quiere demostrar que una propiedad la cumplen todos los números naturales, procedemos:

① Demostramos que es cierta para $n = 1$
② Suponemos que se cumple para $n - 1$ (*hipótesis de inducción*)
③ Intentamos verificar, basándonos en la hipótesis de inducción , que se cumple para n.

Ejemplo 4 : Demostrar que $6\cdot(1 + 7 + 7^2 + \ldots + 7^n) + 1 = 7^{n+1}$, $n \geq 0$

Ejemplo 5: Demostrar que $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

II. CONJUNTOS

CONCEPTO DE CONJUNTO

Definición: Un **conjunto** A es una colección de objetos a los que se llama **elementos** del conjunto.
Si x es un elemento del conjunto, lo representaremos como $x \in A$, y lo leeremos como *x pertenece a A*. En caso contrario escribiremos $x \notin A$, y lo leeremos como *x no pertenece a A*.

Tipos de definiciones de un conjunto:

① **Por enumeración:** Lista completa de elementos

Ejemplo 6: $A = \{2, 4, 6, 10\}$

② **Por una propiedad:** Los elementos de A son los únicos que verifican la propiedad P, y lo escribimos como $A = \{x \text{ t.q. } x \text{ cumple } P\}$

Ejemplo 7: $A = \{x \in \mathbf{N} \text{ t.q. } 2 \le x \le 10,\ x \ne 8 \text{ y } \frac{x}{2} \in \mathbf{N}\}$

- Al conjunto que no posee ningún elemento lo llamaremos **conjunto vacío**, representado como $\varnothing$.
- A un conjunto U tal que todo conjunto A que estemos tratando está incluido en U lo llamaremos **conjunto universal**.
- A un conjunto S tal que para todo $x \in S$, entonces $x \in A$ lo llamaremos un **subconjunto** de A (*y lo representaremos como* $S \subset A$)
- Definiremos el **conjunto complementario** como $\overline{A} = A^c = \{x \text{ t.q. } x \notin A\}$ (*Si U es el conjunto universal, se verifica que* $\overline{A} = A^c = U - A$)

  Significado geométrico:

- Al número de elementos de un conjunto A lo llamaremos **cardinal de** $\boldsymbol{A}$, y lo representaremos como $|A|$, o bien como $\# A$.

Definición: Dos conjuntos son iguales si tienen los mismos elementos.

Proposición: $A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ y } B \subset A$

Cuantificadores:
① $\forall$: "**para todo**"
② $\exists$: "**existe**"

Si $\mathbf{X}$ es un conjunto, entonces se cumple que:
1) $\sim(\forall x \in \mathbf{X} \text{ t.q. } x \text{ cumple } P) \Leftrightarrow \exists\, x \in \mathbf{X} \text{ t.q. } x \text{ no cumple } P$
2) $\sim(\exists\, x \in \mathbf{X} \text{ t.q. } x \text{ cumple } P) \Leftrightarrow \forall\, x \in \mathbf{X} \text{ t.q. } x \text{ no cumple } P$

OPERACIONES ENTRE CONJUNTOS

① **Unión:** $A \bigcup B = \{x: x \in A$ **o** $x \in B\}$
② **Intersección:** $A \bigcap B = \{x: x \in A$ **y** $x \in B\}$ (*Si* $A \bigcap B = \emptyset$ *diremos que A y B son* ***disjuntos***)
③ **Sustracción:** $A - B = \{x: x \in A$ **y** $x \notin B\}$ (*Obsérvese que* $A - B \neq B - A$)
④ **Producto cartesiano:** $A \times B = \{(a, b): a \in A$ **y** $b \in B\}$
⑤ **Diferencia simétrica:** $A \,\Delta\, B = (A \bigcup B) - (A \bigcap B)$

<u>*Significado geométrico:*</u>

- Se verifica que $|A \bigcup B| = |A| + |B| - |A \bigcap B|$
- Se verifica que $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

Ejemplo 8: Demostrar $A - B = A \bigcap B^c$

Algunos resultados de las operaciones entre conjuntos

① Leyes de Morgan:

$$\overline{A \bigcup B} = \overline{A} \bigcap \overline{B} \qquad \overline{A \bigcap B} = \overline{A} \bigcup \overline{B}$$

② Propiedad asociativa:

$$(A \bigcup B) \bigcup C = A \bigcup (B \bigcup C) \qquad (A \bigcap B) \bigcap C = A \bigcap (B \bigcap C)$$

③ Propiedad distributiva:

$$A \bigcap (B \bigcup C) = (A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap C) \qquad A \bigcup (B \bigcap C) = (A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup C)$$

④ Sustracción entre conjuntos:

$$A - B = A \bigcap B^c$$

Ejemplo 9: Demostrar las leyes de Morgan.

Ejemplo 10: Demostrar, usando operaciones entre conjuntos, que $A - (B \bigcap C) = (A - B) \bigcup (A - C)$

PARTES DE UN CONJUNTO

<u>*Definición:*</u> Sea A un conjunto. Entonces las **partes de** $\boldsymbol{A}$ (*y lo representaremos como* $\mathcal{P}(A)$) es el conjunto formado por todos aquellos conjuntos que están incluidos en A (*es, por tanto, un conjunto formado por conjuntos*), esto es, $\mathcal{P}(A) = \{A': A' \subset A\}$

Ejemplo 11: Hallar las partes del conjunto $A = \{a, 3, *\}$

<u>*Proposición:*</u> Si un conjunto tiene n elementos, entonces $\mathcal{P}(A)$ tiene 2^n elementos.

III. FUNCIONES

CONCEPTO DE FUNCIÓN

Definición: Diremos que una **aplicación** o **función** f: $\mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ es una ley que asocia **a todos los elementos** de **X** **un solo** elemento de **Y**.
Al conjunto **X** lo llamamos **conjunto inicial**, y al conjunto **Y** lo llamamos **conjunto final**.

Significado geométrico:

Ejemplo 12: Sea f: $\mathbf{N} \to \mathbf{Z}$. Determinar si $f(n) = \pm 2n$ es una función. Lo mismo para $f(n) = \frac{n}{2}$.

- A pesar de que en la definición de función es necesario que asociemos a cada elemento del conjunto inicial un elemento del conjunto final, en muchas ocasiones no será así. Por ejemplo, en sentido estricto la función f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{x}$. Para que sea función habría que restringirla a su dominio, esto es, f: $\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$.

Definición: Llamamos **dominio** de una función $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$, y lo representamos como **Dom**$\{f\}$, al conjunto de los $x \in \mathbf{X}$ para los cuales existe un $y \in \mathbf{Y}$ tal que $f(x) = y$ (*De un modo intuitivo se podría definir como aquellos $x \in \mathbf{X}$ para los cuales les hacemos corresponder un $y \in \mathbf{Y}$*)

Significado geométrico:

Ejemplo 13: Determinar el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \ln(x^2 - 5x + 6)$ **b)** $f(x) = \text{arcsen}(x^2 + 1)$ **c)** $f(x) = \dfrac{x-2}{e^x - 2}$

Definición: Llamamos **imagen** o **recorrido** de una función f: $\mathbf{X} \to \mathbf{Y}$, y lo representamos como **Im**$\{f\}$ al conjunto de $y \in \mathbf{Y}$ tales que existe un $x \in \mathbf{X}$ tales que $f(x) = y$ (*De un modo intuitivo se podría definir como los elementos del subconjunto final tales que les hacemos corresponder un elemento en el conjunto inicial*)

Significado geométrico:

Ejemplo 14: Hallar la imagen de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^2$ **b)** $f(x) = \frac{1}{x}$ **c)** $f(x) = \text{sen}^2\left(\dfrac{\ln(1-x)}{1+x^2}\right)$

Función restringida: Sea f: $\mathbf{X} \to \mathbf{Y}$, y sea $A \subset \mathbf{X}$. Entonces $f|_A : A \to \mathbf{Y}$ es una restricción de f: $\mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ si $\forall\, x \in A$ se tiene que $f|_A(x) = f(x)$

Significado geométrico:

Composición de funciones: Sean f: $\mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ y g: $\mathbf{Y} \to \mathbf{Z}$, entonces $g \circ f$: $\mathbf{X} \to \mathbf{Z}$ es la **composición** de f y g, y se representa como $g(f(x))$

- Para que exista la composición $g(f(x))$ de ambas funciones es necesario que $\mathbf{Im}\{f\} \subseteq \mathbf{Dom}\{g\}$.

Significado geométrico:

Ejemplo 15: Dadas las funciones f, g: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = -x^2$, $g(x) = \ln x$, hallar $g \circ f$ y $f \circ g$.

TIPOS ESPECIALES DE FUNCIONES

① *Función inyectiva:* Cumple que si $f(x) = f(y)$, entonces $x = y$

Significado geométrico:

Ejemplo 16: ¿Es inyectiva la función $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$? ¿Y $g(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$?

② *Función suprayectiva:* Cumple que $\forall\, y \in \mathbf{Y}$ (*conjunto final*), $\exists\, x \in \mathbf{X}$ (*conjunto origen*) tal que $f(x) = y$

- Se verifica, por tanto, que una función es sobreyectiva si y sólo $\mathbf{Im}\{f\} = \mathbf{Y}$ (*conjunto final*)

Significado geométrico:

Ejemplo 17: ¿Es suprayectiva la función $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$? ¿Y $g(x) = \dfrac{1}{x}$?

③ *Función biyectiva:* Es inyectiva y sobreyectiva.

Significado geométrico:

Ejemplo 18: ¿Es biyectiva la función f: $\mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ definida como $f(x) = x + 1$? ¿Y definida de $\mathbf{R}$ a $\mathbf{R}$?

FUNCIONES INVERSAS

Definición: Sea $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ dos conjuntos. Decimos que $i_{\mathbf{X}}$: $\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$ e $i_{\mathbf{Y}}$: $\mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{Y}$ son las **funciones identidades** (*en* $\mathbf{X}$ *e* $\mathbf{Y}$ *respectivamente*) si $i_{\mathbf{X}}(x) = x \ \forall x \in \mathbf{X}$ e $i_{\mathbf{Y}}(y) = y \ \forall y \in \mathbf{Y}$.

Definición: Sean $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ dos conjuntos. Sea f una función tal que f: $\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$. Entonces decimos que una aplicación g: $\mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{X}$ es la **función inversa** de f (*y lo representamos como* $g = f^{-1}$) si se cumple que:

a) $g \circ f = i_{\mathbf{X}}$.

b) $f \circ g = i_{\mathbf{Y}}$.

Significado geométrico:

Teorema: Sea una función f: $\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$. Entonces f es invertible si y solo si f es biyectiva.

Significado geométrico:

- Sin embargo, aunque una función f: $\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ no sea biyectiva (*esto es, no posea inversa*), sí se puede definir la **imagen inversa de un conjunto** $A \subset \mathbf{Y}$, la cual se define como $f^{-1}(A) = \{x \in \mathbf{X} \mid f(x) \in A\}$.

Ejemplo 19: Dada la función f: $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 + 1$. Hallar $f^{-1}(\{2\})$, $f^{-1}(\{0\})$ y $f^{-1}([2,5))$.

Método para hallar la función inversa a una dada:

a) Llamamos y a $f(x)$
b) Cambiamos la y por la x y viceversa
c) Despejamos y. La expresión en función de x así obtenida es $f^{-1}(x)$

Ejemplo 20: Hallar la función inversa de $f(x) = \dfrac{\ln x}{2}$

Propiedades de las funciones inversas:

a) Si f es invertible $\Rightarrow f^{-1}$ es invertible.
b) $(f^{-1})^{-1} = f$

IV. RELACIONES

CONCEPTO DE RELACIÓN

Definición: Sea **X** un conjunto. Decimos que dos elementos x e y están relacionados mediante la relación **R** (*y lo escribiremos como x* **R** *y o x~ y*) si ambos cumplen la propiedad determinada por la relación.

Ejemplo 21: Sea **X** = {1,2,3,4,5,6}, y sea **R** = {x e y tienen la misma paridad}. Estudiar la relación.

Propiedades de una relación binaria:

① ***Reflexiva:*** Si $\forall x \in \mathbf{X}$, entonces $x\,\mathbf{R}\,x$ (*se representa como* (***r***))
② ***Simétrica:*** Si $x\,\mathbf{R}\,y \Rightarrow y\,\mathbf{R}\,x$ (*se representa como* (***s***))
③ ***Antisimétrica:*** Si $x\,\mathbf{R}\,y$ e $y\,\mathbf{R}\,x \Rightarrow y = x$ (*se representa como* (***a***))
④ ***Transitiva:*** Si $x\,\mathbf{R}\,y$ e $y\,\mathbf{R}\,z \Rightarrow x\,\mathbf{R}\,z$ (*se representa como* (***t***))

Tipos de relaciones:

① ***Relación de orden:*** **(*r*) , (*a*) , (*t*)**
a) Orden total: Si $\forall\, x, y$, entonces $x\,\mathbf{R}\,y$ o bien $y\,\mathbf{R}\,x$
b) Orden parcial: No es total

② ***Relación de equivalencia:*** **(*r*) , (*s*) , (*t*)**

Ejemplo 22: Clasificar las siguientes relaciones:
a) $\subset$ (*inclusión*) definida en las partes de A.
b) $<$ (*menor que*) definida en **Q**.
c) $a\,\mathbf{R}\,b \Leftrightarrow a - b$ es múltiplo de 2 definida en **Z**.

RELACIONES DE ORDEN

Definición: Sea $A \subset U$ un conjunto del conjunto universal U con una relación de orden. Diremos que u es un

a) Elemento minimal de A si no existe un elemento x tal que $x\,\mathbf{R}\,u$ para todo $x \in A$.
b) Elemento maximal de A si no existe un elemento x tal que $u\,\mathbf{R}\,x$ para todo $x \in A$.

c) Mínimo de A si $\underline{u \in A}$ y $u\,\mathbf{R}\,x$ para todo $x \in A$ (*si existe el mínimo, entonces es único*).
d) Máximo de A si $\underline{u \in A}$ y $x\,\mathbf{R}\,u$ para todo $x \in A$ (*si existe el máximo, entonces es único*).

e) Cota inferior de A si $u\,\mathbf{R}\,x$ para todo $x \in A$.
f) Cota superior de A si $x\,\mathbf{R}\,u$ para todo $x \in A$.

g) Ínfimo de A al máximo de las cotas inferiores de A.
h) Supremo de A al mínimo de las cotas superiores de A.

- El máximo y el mínimo tienen que pertenecer al conjunto A, y no así el supremo y el ínfimo (*sin embargo, si existe el máximo es también el supremo, y si existe el mínimo es también el ínfimo*)

- El máximo, mínimo, supremo e ínfimo, si existen, han de ser únicos; sin embargo los elementos maximales, minimales, cotas superiores e inferiores no tienen por que ser únicas.
- Para estudiar los elementos minimales, maximales, máximos, mínimos, cotas, ínfimos y supremos, es aconsejable hacer un diagrama de la relación de orden.

Ejemplo 23: Estudiar las siguientes relaciones en los siguientes conjuntos, hallando los elementos minimales, maximales, máximos, mínimos, cotas, ínfimos y supremos:

a) $\subset$ (*inclusión*) en $P(A)$, $A = \{a, b, c\}$.
b) $|$ (*divisibilidad*) en **N**.
c) $|$ (*divisibilidad*) en $A = \{4, 6, 8, 10, 12\}$ en **N**.
d) $<$ en **R**.
e) $<$ en $(0,1] \subset$ **R**.
f) $\leq$ en **R**.

CLASES DE EQUIVALENCIA. CONJUNTO COCIENTE

Clases de equivalencia: Sea A un conjunto, y sea $x \in A$. Entonces dada una relación de equivalencia **R**, llamaremos **clase de equivalencia de *x*** al conjunto de los elementos $\mathbf{R}_x = [x] = \overline{x} = \{y \in A \text{ t.q. } x \mathbf{R} y\}$ (*Obsérvese que* $\mathbf{R}_x \subset P(A)$)

Conjunto cociente: Dado un conjunto A y una relación de equivalencia **R**, el **conjunto cociente** definido por **R** será el conjunto de todas las clases de equivalencia de los elementos de A, y lo representamos como $A/_{\mathbf{R}} = \{\mathbf{R}_x \text{ t.q. } x \in A\}$

Significado geométrico:

Ejemplo 24: Hallar las clases de equivalencia y el conjunto cociente de las relaciones:

a) $a \mathbf{R} b \Leftrightarrow a$ y b tienen el mismo resto al dividirlos por tres en **Z**.
b) $a \mathbf{R} b \Leftrightarrow a$ y b tienen el mismo número de dígitos en **N**.

Definición: Sea **X** un conjunto, y sean A_i subconjuntos de **X**. Entonces decimos que $\Sigma = \{A_1, A_2, \ldots\}$ es una **partición** si se cumple que:

① $\bigcup A_n = \mathbf{X}$
② $A_i \bigcap A_j = \varnothing \;\forall\, i, j$ t.q. $i \neq j$.

Significado geométrico:

Teorema: Sea **X** un conjunto, y sea **R** una relación de equivalencia. Entonces el conjunto cociente determina una partición en **X**.

Ejemplo 25: Sea **X** ={conjunto de rectas en el plano}, y sea $a \mathbf{R} b \Leftrightarrow a$ y b son rectas paralelas. Estudiar la partición que determina el conjunto cociente.

Ejemplo 26 : Definimos, en **N**, la relación $a \mathbf{R} b \Leftrightarrow \mathbf{E}[\sqrt{a}] = \mathbf{E}[\sqrt{b}]$. ¿Qué partición que determina?

V. ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS

ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS ELEMENTALES

Definición: Sea E un conjunto, y S un subconjunto de E. Definimos una **operación binaria** (*y lo representamos como* $*$) a una aplicación $f: S \times S \to E$ definida por $f(a, b) = a * b$

1.- Propiedades de las operaciones binarias:

① **Cerrada:** Si $\forall\, a, b \in S \Rightarrow a * b \in S$

② **Conmutativa:** Si $\forall\, a, b \in S \Rightarrow a * b = b * a$

③ **Asociativa:** Si $\forall\, a, b \in S \Rightarrow a * (b * c) = (a * b) * c$

④ **Elemento neutro:** $\exists\, e \in S \mid \forall\, a \in S \Rightarrow a * e = a$ y $e * a = a$

⑤ **Elemento opuesto:** $\forall\, a \in S, \exists\, (-a) \in S \mid a * (-a) = e$ y $(-a) * a = e$

Ejemplo 27: Estudiar las siguientes operaciones
- **a)** $a * b = a + b + a{\cdot}b$ definida en **R**
- **b)** $a * b = a - b$ definida en **N**
- **c)** $a * b = a{\cdot}b - 2$ definida en **Q**
- **d)** $(a, b) * (a', b') = (a{\cdot}a', 0)$ definida en **Z**×**Z**

Grupos:

Sea S un conjunto, y $*$ una operación binaria definida en él. Entonces al par $(S, *)$ es un **grupo** si:
- ① S es cerrado con respecto a $*$
- ② $*$ es asociativa
- ③ S tiene un elemento neutro con respecto a $*$
- ④ S tiene un elemento opuesto con respecto a $*$

Si además:
- ⑤ $*$ es conmutativa, decimos que $(S, *)$ es un **grupo conmutativo o abeliano**.

Ejemplo 28: Estudiar si tienen estructura de grupo:
- **a)** La operación $a * b = \frac{ab}{2}$ definida en **Q**
- **b)** La operación $f * g = g \circ f$ definida en **C**[0,1] = {conjunto de funciones continuas en [0,1]}

2.- Relación entre dos operaciones binarias: la propiedad distributiva:

Sean $\bullet$ y $*$ dos operaciones binarias. Entonces decimos que $\bullet$ es **distributiva** con respecto a $*$ si:
- **a)** $a \bullet (b * c) = (a \bullet b) * (a \bullet c)$
- **b)** $(a * b) \bullet c = (a \bullet c) * (b \bullet c)$

Ejemplo 29: Discutir si son distributivas las operaciones $\cup$ y $\cap$ definidas en $P(\mathbf{X})$

Anillos:

Sea S un conjunto, y sean $*$ y $\bullet$ dos operaciones binarias. Entonces $(S, *, \bullet)$ es un **anillo** si:

① S es cerrado con respecto a $*$ y $\bullet$
② $(S,*)$ es un grupo conmutativo (*al elemento neutro de la operación* $*$ *lo llamaremos* **0**)
③ $\bullet$ es **distributiva** con respecto a $*$
④ $\bullet$ es **asociativa**

Si además:
⑤ la operación $\bullet$ es conmutativa lo llamaremos **anillo conmutativo**

Si además:
⑥ la operación $\bullet$ tiene elemento neutro lo llamaremos **anillo unitario** (*y al elemento neutro lo representaremos como* **1**)

Ejemplo 30: Estudiar si tiene estructura de anillo el conjunto $\mathbf{X} = \{n + m\sqrt{2} \mid n, m \in \mathbf{Z}\}$ con la suma y producto habituales.

Cuerpos:

Sea S un conjunto, y sean $*$ y $\bullet$ dos operaciones binarias. Entonces $(S, *, \bullet)$ es un **cuerpo** si:

① $(S, *, \bullet)$ es un anillo conmutativo y unitario

② Todo elemento de S, a excepción del elemento neutro de la operación $*$ (*esto es, todos a excepción de* **0**) tienen inverso

- Por lo general, para evitar la memorización de las propiedades de cada estructura algebraica, es más práctico conocer algunos ejemplos de cada una de ellas.

Ejemplo 31: Rellenar el siguiente cuadro:

CONJUNTO	ESTRUCTURA ALGEBRAICA
$(\mathbf{Z}, +)$	
$(\mathbf{Q}, \cdot)$, $(\mathbf{R}, \cdot)$	
$(\mathbf{Z}, +, \cdot)$	
$(\mathbf{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbf{R}, +, \cdot)$	

Ejercicios

1. Demostrar por inducción:
   a) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ $\forall n \in \mathbf{N}$, $n \geq 1$.
   b) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$ $\forall n \in \mathbf{N}$, $n \geq 1$.
   c) La suma de los n primeros números naturales impares es n^2.
   d) La suma de los n primeros números naturales pares es $n^2 + n$.
   e) Dado $a \in \mathbf{R}$, $a \neq 1$, entonces se cumple que $1 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$
   f) $3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ es múltiplo de 17.
   g) $4^n + 6n - 1$ es múltiplo de 9.
   h) $2^n > 1 + 2n$ $\forall n \in \mathbf{N}$, $n > 2$.
   i) $2^n > n^2 + 1$ $\forall n \in \mathbf{N}$, $n > 4$.
   j) $n! > 2^n$ $\forall n \in \mathbf{N}$, $n > 3$.
   k) Sea la sucesión $a_1, a_2, a_3, \ldots$, la cual está definida mediante la relación de recurrencia $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$. Demostrar que para $a_1 = 1$ y $a_2 = 2$ se tiene que $a_n = 2^{n-1}$.
   l) Dado $x \in \mathbf{R}$, $x > 0$, y dado $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, entonces $(1 + x)^n > 1 + nx$. Deducir que $(1 + \frac{1}{n})^n > 2$.

2. Demostrar los siguientes resultados:
   a) Si m y n son potencias de tres, entonces $m + n$ no lo es.
   b) La diferencia de dos cuadrados perfectos mayores que uno nunca es primo.
   c) Si un número natural n es un cuadrado perfecto, entonces no lo puede ser $n + 1$.

3. Encontrar la relación entre A y B en cada uno de los siguientes casos:
   a) $A \cap B = A$ [**sol:** $A \subseteq B$]
   b) $A \cup B = A$ [**sol:** $B \subseteq A$]
   c) $B^c \subset A^c$ [**sol:** $A \subset B$]
   d) $A \,\Delta\, B = \emptyset$ [**sol:** $A = B$]

4. Supongamos que $A \subset B \subset C$. Hallar $A - B$, $A - C$ y $A \cup B$. [**sol:** $\emptyset$, $\emptyset$, B]

5. Demostrar que si $A \cap B = \emptyset$, entonces $A \subseteq B^c$. ¿Es cierto también que $B \subseteq A^c$?

6. Si A y C son disjuntos, ¿a qué es igual $A \cap (B \cup C)$? [**sol:** $A \cap B$]

7. Demostrar, usando la doble inclusión, las siguientes igualdades:
   a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
   b) $A^c - B^c = B - A$
   c) $A - (A - B) = A \cap B$
   d) $A \cap (A \cup B) = A$

8. Demostrar, utilizando operaciones entre conjuntos, las siguientes igualdades:
   a) $A = (A \cap B) \cup (A - B)$
   b) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - C$
   c) $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$

9. Encontrar una fórmula para $|A \cup B \cup C|$.

10. Sean $A = \{1, 2\}$, $B = \{3,4\}$ y $C = \{4,5\}$. Hallar:
   a) $A \times A$ [**sol:** $\{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$]
   b) $A \times (B \cap C)$ [**sol:** $\{(1,4), (2,4)\}$]

11. ¿ Se verifica que $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$? [**sol:** no]

12. Demostrar que $(A \times B) \cap (B \times A) = (A \cap B) \times (A \cap B)$

13. ¿Cuando es cierto que si $A \times B = C \times D$, entonces $A = C$ y $B = D$? Dar un ejemplo en el que no se cumpla la implicación. [**sol:** Si $A \neq \varnothing \neq B$]

14. Demostrar que si un conjunto tiene n elementos, entonces $P(A)$ tiene 2^n elementos. (*Si un conjunto tiene n elementos, entonces el número de subconjuntos de k elementos contenidos en él, es decir, las combinaciones de n elementos tomadas de k en k, vienen dadas por* $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$. *Por otro lado, por el binomio de Newton,* $(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n$)

15. Describir el conjunto de las partes de los siguientes conjuntos:
    a) $A = \{a, b\}$
    b) $B = P(A)$
    c) $C = \{1, \varnothing, \{p, q\}\}$
    d) $D = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$

16. Sea $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{1, 2, 3\}$. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas?:
    a) $\{a\} \in A$ [**sol:** F] b) $\varnothing \in A$ [**sol:** F] c) $\{1, 3\} \in P(B)$ [**sol:** V]
    d) $\varnothing \subset P(B)$[**sol:** F] e) $\varnothing \in P(B)$ [**sol:** V] f) $\{\varnothing\} \subset P(A)$ [**sol:** F] g) $\{\{a\}, \{a, b\}\} \subset P(A)$ [**sol:** V] h) $\varnothing \subset P(A \cap B)$ [**sol:** V] i) $\{\varnothing\} \in P(A \cup B)$ [**sol:** F]

17. Encontrar la imagen de las siguientes funciones:
    a) f: **Q** $\to$ **Q** dada por $f(x) = \frac{1}{4}(x-1)$ [**sol: Q**]
    b) f: **R** $\to$ **R** dada por $f(x) = x^2 - 5$ [**sol:** $[-5, \infty)$]
    c) f: **R** $\to$ **R** dada por $f(x) = x^2 - 2x$ [**sol:** $[-1, \infty)$]
    d) f: **R** $\to$ **R** dada por $f(x) = \dfrac{1}{2+e^x}$ [**sol:** (0, ½)]
    e) f: **Q** – {1} $\to$ **Q** dada por $f(x) = \dfrac{2x-3}{x-1}$ [**sol: Q** – 2]

18. Estudiar si son inyectivas y sobreyectivas las siguientes funciones:
    a) f: **Z** $\to$ **Z** dada por $f(x) = 3x - 1$ [**sol:** sí, no]
    b) f: **N** $\to$ **N** dada por $f(x) = 3x - 1$ [**sol:** sí, no]
    c) f: **R** $\to$ **R** dada por $f(x) = x^3 - x$ [**sol:** no, sí]
    d) f: **R** – {½} $\to$ **R** dada por $f(x) = \dfrac{x+1}{2x-1}$ [**sol:** sí, no]
    e) f: **Z** $\to$ **Z** dada por $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{si } x \text{ es par} \\ 2x, & \text{si } x \text{ es impar} \end{cases}$ [**sol:** sí, no]
    f) f: **Z** × **Z** $\to$ **Z** dada por $f(x, y) = y$ [**sol:** no, sí]
    g) f: **Z** $\to$ **Z** dada por $f(x) = 2x - 7$ [**sol:** sí, no]
    h) f: **Z** $\to$ **N** dada por $f(x) = x^2 + x + 1$ [**sol:** no, no]
    i) f: **Z** × **Z** $\to$ **Z** dada por $f(x, y) = 2x + 3y$ [**sol:** no, sí]

19. Sean las funciones f: **Z** $\to$ **Z** × **Z** dada por $f(x) = (x + 3, 1)$ y g: **Z** × **Z** $\to$ **Z** dada por $g(x, y) = x + y$.
    a) Demostrar que f es inyectiva pero no es sobreyectiva.
    b) Demostrar que g no es inyectiva pero es sobreyectiva.
    c) Hallar $g \circ f$ y demostrar que es biyectiva. [**sol:** $g \circ f(x) = x + 4$]

20. Demostrar que la función f: $\mathbf{N} \to \mathbf{Z}$ dada por $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{si } x \text{ es par} \\ \frac{1-x}{2}, & \text{si } x \text{ es impar} \end{cases}$ es biyectiva. Describir f^{-1}.

[**sol:** $f^{-1}(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } x > 0 \\ 1-2x, & \text{si } x \le 0 \end{cases}$]

21. Sea f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x, & \text{si } x \le -1 \\ 3x, & \text{si } x > -1 \end{cases}$, y sea $A = [-2,1] \subset \mathbf{R}$. Se pide:
 a) Dibujar el grafo de f y calcular $f(A)$. [**sol:** $f(A) = [-4, 3]$]
 b) Demostrar que f no es inyectiva ni sobreyectiva, pero que si restringimos f: $A \to f(A)$ es una biyección. Encontrar la función inversa de dicha biyección.

22. Sean f, g: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definidas por $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x \le 1 \\ 1-x^2, & \text{si } x > 1 \end{cases}$ y $g(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x < 0 \\ (x-1)^2, & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$. Se pide dibujar el grafo de las funciones f, g, $g \circ f$ y $f \circ g$, estudiando si son inyectivas o suprayectivas.

[**sol:** f sobre; $f \circ g$ sobre]

23. Hallar la función inversa de $f(x) = \dfrac{2x-4}{x-5}$, comprobando el resultado. [**sol:** $f^{-1}(x) = \dfrac{4-5x}{2-x}$]

24. Dar un ejemplo de función f: $\mathbf{Q} \to \mathbf{Q}$ biyectiva, y calcular f^{-1}, en los siguientes casos:
 a) $f(x) \ne x \ \forall x \in \mathbf{Q}$.
 b) $f(x) > x^3 \ \forall x \in \mathbf{Q}$.

25. Sea f: $\mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ una aplicación. Recuérdese que si $B \subset \mathbf{Y}$, entonces $f^{-1}(B) = \{x \in \mathbf{X} \mid f(x) \in B\}$. Definir una aplicación f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tal que $f^{-1}(\{3\}) = \mathbf{R}$. Describir $f^{-1}(\{\pi\})$ para dicha función.

26. Dadas las aplicaciones f: $\mathbf{X} \to \mathbf{Y}$, g: $\mathbf{Y} \to \mathbf{Z}$, demostrar que:
 a) Si $g \circ f$ es inyectiva, entonces f es inyectiva.
 b) Si $g \circ f$ es suprayectiva, entonces g es suprayectiva.
 c) Si f y g son inyectivas, entonces $g \circ f$ es inyectiva.
 d) Si f y g son sobreyectivas, entonces $g \circ f$ es sobreyectiva.

27. Estudiar si las siguientes relaciones cumplen las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva:
 a) $a \mathbf{R} b \Leftrightarrow a \cdot b$ es múltiplo de cinco, en $\mathbf{Z}$. [**sol:** (s)]
 b) $a \mathbf{R} b \Leftrightarrow a$ es distinto de b, en $\mathbf{R}$. [**sol:** (s), (t)]
 c) $a \mathbf{R} b \Leftrightarrow a$ y b tienen un factor común mayor que uno, en $\mathbf{N}$. [**sol:** (r), (s)]
 d) $a \mathbf{R} b \Leftrightarrow a \ge |b|$, en $\mathbf{Z}$. [**sol:** (t)]
 e) $a \mathbf{R} b \Leftrightarrow a < b$, en $A = \{2,3,4,6\}$. [**sol:** (t)]
 f) $a \mathbf{R} b \Leftrightarrow a + b \le 8$, en $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. [**sol:** ($s$)]
 g) $a \mathbf{R} b \Leftrightarrow a \cdot b > 0$, en $\mathbf{R}$. [**sol:** (s), (t)]
 h) $a \mathbf{R} b \Leftrightarrow a \cdot b \ge 0$, en $\mathbf{R}$. [**sol:** (r), (s), (t)]

28. Estudiar la existencia de máximo, mínimo, cotas, supremo e ínfimo de los siguientes conjuntos
 a) $A = \{\frac{2-n}{n} \mid n \in \mathbf{Z}^*\}$ con la relación del orden en $\mathbf{R}$. [**sol:** máx = sup = 1; mín = inf = –3]
 b) $B = \{\frac{2+n}{n} \mid n \in \mathbf{Z}^*\}$ con la relación del orden en $\mathbf{R}$. [**sol:** máx = sup = 3; mín $\nexists$, inf = 2]

29. En $\mathbf{C}[0,1] = \{f \mid f: [0,1] \to \mathbf{R}, f \text{ continua}\}$ definimos la relación $f\mathbf{R}g \Leftrightarrow \sup f \le \sup g$. Estudiar si es una relación de orden. [**sol:** no]

30. En $A = \{2,3,5,6,10,15,30\}$ está definida la relación $a \mathbf{R} b \Leftrightarrow a \mid b$. Demostrar que es una relación de orden, y hallar los elementos maximales, minimales, máximo y mínimo, cotas superiores e inferiores y supremo e ínfimo. [**sol:** max = sup = 30; mín $\nexists$, inf = 1]

31. Sea $\mathbf{X} = \{A \in \mathcal{P}(\mathbf{Z}) \mid A$ es finito$\}$. Estudiar si son relaciones de orden:
   a) $A \mathbf{R} B \Leftrightarrow |A| \le |B|$ [**sol:** no]
   b) $A \mathbf{R} B \Leftrightarrow |A| < |B|$ [**sol:** orden estricto]

32. Sea $\mathbf{X}$ un conjunto, y sea f una aplicación f: $\mathbf{X} \to \mathbf{N}$. Definimos en $\mathbf{X}$ la siguiente relación: $a \mathbf{R} b \Leftrightarrow f(a) \le f(b)$. Probar que no es de orden, y dar condiciones para que lo sea. [**sol:** f inyectiva]

33. En $\mathbf{R}^2$ se define la relación $(a, b) \mathbf{R} (c, d) \Leftrightarrow \begin{cases} a < c, & \text{o bien} \\ a = c \ \text{ y } & b \le d \end{cases}$. Se pide:
   a) Demostrar que es de orden. Hacer un esquema gráfico de la relación (*a dicha relación se la denomina lexicográfica; ¿sabrías decir por qué?*). Obtener un relación equivalente para $\mathbf{R}^3$.
   b) Sea $\mathbf{C} = \{(x, y) \in \mathbf{Z}\times\mathbf{Z} \mid x^2 + y^2 \le 4\}$. Ordenar sus elementos en el orden lexicográfico y obtener sus elementos maximales, minimales, máximos y mínimos.
   c) Hallar elementos minimales y maximales, máximos, mínimos, cotas superiores e inferiores, supremos e ínfimos de los siguientes conjuntos, considerando el orden lexicográfico en $\mathbf{R}^2$:
   1. $[0,1] \times [0,1]$ 2. $(0,1) \times (0,1)$ 3. $[0,1] \times (0,1)$ 4. $(0,1) \times [0,1]$

34. Verificar si las siguientes relaciones son de equivalencia en los conjuntos $\mathbf{X}$ especificados. En el caso de que sea de equivalencia, hallar el conjunto cociente generado por la relación:
   a) $\mathbf{X}$ = {personas que viven en una ciudad}; $a \sim b \Leftrightarrow a$ y b viven en la misma calle.
   b) $\mathbf{X}${personas europeas}; $a \sim b \Leftrightarrow a$ y b nacieron el mismo día y mes.
   c) $\mathbf{X} = \mathbf{Z}$. $a \sim b \Leftrightarrow a$ y b tienen la misma paridad. [**sol:** $\mathbf{X}/\!\sim\, = \{\overline{0}, \overline{1}\}$]
   d) $\mathbf{X} = \mathbf{R}$. $a \sim b \Leftrightarrow a < b$ [**sol:** no es de equivalencia]
   e) $\mathbf{X} = \mathbf{R}$. $a \sim b \Leftrightarrow |a| = |b|$ [**sol:** $\mathbf{X}/\!\sim\, = \{\overline{x} \mid x \in \mathbf{R}^+\}$]
   f) $\mathbf{X} = \mathbf{R}$. $a \sim b \Leftrightarrow a - b$ es entero. [**sol:** $\mathbf{X}/\!\sim\, = \{\overline{x} \mid x \in [0,1)\}$]
   g) $\mathbf{X} = \mathbf{N}$. $a \sim b \Leftrightarrow a$ y b tienen el mismo número de dígitos. [**sol:** $\mathbf{X}/\!\sim\, = \{\overline{10^k} \mid k \in \mathbf{N}\}$]

35. Sea $\mathbf{X}$ un conjunto. Demostrar que, en cada caso, Σ es una partición. Definir una relación de equivalencia $\mathbf{R}$ en $\mathbf{X}$ tal que el conjunto cociente coincida con la partición:
   a) Sea $\mathbf{X} = \mathbf{R}$. Definimos $E_k = \{x \in \mathbf{R} \mid k \le x < k + 1\}$ $(k \in \mathbf{Z})$ y $\Sigma = \{E_k \mid k \in \mathbf{Z}\}$
   b) Sea $\mathbf{X} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. Definimos $\Sigma = \{\{1,4,9\}, \{6,8,10\}, \{2,3,5,7\}\}$
   c) Sea $\mathbf{X}$ un conjunto. Definimos $E_x = \{x\}$ y $\Sigma = \{E_x \mid x \in \mathbf{X}\}$

36. Probar que las siguientes relaciones son de equivalencia, y hallar la clase de los elementos indicados:
   a) Sea $\mathbf{X} = \mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$. Definimos la relación $(x,y) \mathbf{R} (x',y') \Leftrightarrow x + y' = x' + y$. Hallar $\overline{(1,2)}, \overline{(0,-3)}, \overline{(a,b)}$
   b) Sea $\mathbf{X} = \mathbf{Z}^+$. Definimos la relación $x \mathbf{R} y \Leftrightarrow x\cdot y$ es un cuadrado perfecto. Hallar $\overline{1}, \overline{2}, \overline{p}$ (p *primo*)
   c) Sea $\mathbf{X} = \mathbf{Z}^+$. Definimos la relación $x \mathbf{R} y \Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbf{Z} \mid x = 10^k \cdot y$. Hallar $\overline{1}, \overline{200}, \overline{170}$
   d) Sea $\mathbf{X} = \mathbf{C}$. Definimos la relación $x \mathbf{R} y \Leftrightarrow |x| = |y|$. Hallar $\overline{2i}, \overline{1+i}, \overline{a+bi}$.
   e) Sea $\mathbf{X} = \mathbf{Q}$. Definimos $x \mathbf{R} y \Leftrightarrow \exists\, h \in \mathbf{Z}$ tal que $x = \frac{3y+h}{3}$. Hallar $\overline{\tfrac{2}{3}}$ y $\overline{\tfrac{4}{5}}$.
   f) Sea $\mathbf{X} = \mathbf{R}^*$. Definimos $x \mathbf{R} y \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = y + \frac{1}{y}$. Hallar $\overline{3}, \overline{1}, \overline{a}$.

37. Sea $\mathbf{X} = \{f\!: \mathbf{R} \to \mathbf{R}\}$ y sea $n > 0$. Se define en $\mathbf{X}$ la siguiente relación $f \mathbf{R}_n g \Leftrightarrow \lim_{t\to 0} \dfrac{f(t) - g(t)}{t^n} = 0$.
   a) Demostrar que $\mathbf{R}_n$ es una relación de equivalencia.
   b) ¿Es 3^x $\mathbf{R}_2$ e^x ? [**sol:** no]
   c) ¿Es sen x $\mathbf{R}_1$ x? [**sol:** sí]

38. Estudiar si son relaciones de equivalencia, y en caso afirmativo hallar el conjunto cociente:
   a) Sea $\mathbf{X} = \mathbf{Z}\times\mathbf{Z}^*$. Definimos la relación $(x, y) \mathbf{R} (x', y') \Leftrightarrow x\cdot y' = y\cdot x'$.
   b) Sea $\mathbf{X} = \mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$. Definimos la relación $(x, y) \mathbf{R} (x', y') \Leftrightarrow x\cdot y' = y\cdot x'$.
   c) Sea $\mathbf{X} = \mathbf{Z}\times\mathbf{Z}^*$. Definimos la relación $(x, y) \mathbf{R} (x', y') \Leftrightarrow x + y' = y + x'$.
   d) Sea $\mathbf{X} = \mathbf{R}^2$. Definimos la relación $(x, y) \mathbf{R} (x', y') \Leftrightarrow x = x'$.
   e) Sea $\mathbf{X} = \mathbf{R}^2$. Definimos la relación $(x, y) \mathbf{R} (x', y') \Leftrightarrow x - x' \in \mathbf{Z}$ e $y - y' \in \mathbf{Z}$.
   f) Sea $\mathbf{X} = \mathbf{R}^2$. Definimos la relación $(x, y) \mathbf{R} (x', y') \Leftrightarrow d((x, y), (x', y')) < 1$.

g) Sea **X** = **R**. Definimos la relación $x\,\mathbf{R}\,y \Leftrightarrow [x] = [y]$ ($[a]$ = *parte entera de a*).
h) Sea **X** = **Z**. Definimos la relación $x\,\mathbf{R}\,y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y$.

39. Comprobar que $x * y = \dfrac{x+y}{1+xy}$ es una operación cerrada en **C** = $\{-1 < x < 1\}$. (*Sugerencia: intentar demostrar que* $\left(\dfrac{x+y}{1+xy}\right)^2 < 1$)

40. Estudiar si la operación $x * y = \frac{1}{4}xy(x+1)(y+1)$ es cerrada en **Z**, conmutativa y asociativa.
[**sol:** sí, sí, no]

41. Estudiar si (**Q**, ∗) es un grupo con respecto a las siguientes operaciones:
a) $a * b = a + b + ab$. [**sol:** no]
b) $a * b = |a + b|$. [**sol:** no]
c) $a * b = a + b + 1$. [**sol:** sí]

42. Se definen en **N** las operaciones $a * b = a + 2b$ y $a \bullet b = 2ab$. Demostrar que • es distributiva con respecto a ∗.

43. Sea $\mathbf{M}_{2\times2}(\mathbf{R}) = \{\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbf{R}\}$. Decir si es verdadero o falso que los siguientes conjuntos tienen la estructura indicada:
a) ($\{A \in \mathbf{M}_{2\times2}(\mathbf{R}) \mid b = 0\}, +, \cdot$) cuerpo. [**sol:** no]
b) ($\{A \in \mathbf{M}_{2\times2}(\mathbf{R}) \mid c = 0\}, +, \cdot$) anillo no conmutativo. [**sol:** sí]
c) ($\{A \in \mathbf{M}_{2\times2}(\mathbf{R}) \mid ad - bc = 1\}, \cdot$) grupo. [**sol:** sí]
d) ($\{A \in \mathbf{M}_{2\times2}(\mathbf{R}) \mid a = c;\ b = d = 0\}, +, \cdot$) cuerpo. [**sol:** no]
e) ($\{A \in \mathbf{M}_{2\times2}(\mathbf{Z}) \mid ad - bc = 1$ y b es par$\}, \cdot$) grupo.
f) ($\{A \in \mathbf{M}_{2\times2}(\mathbf{R}) \mid c = d\}, +, \cdot$) anillo.

44. Sea $\mathbf{M} = \mathbf{M}_{2\times2}(\mathbf{R})$ y $\mathbf{H} = \{\begin{pmatrix} a & 2a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbf{R}\}$. Encontrar los elementos neutros de **M** y **H** con respecto a la multiplicación de matrices. Encontrar el elemento inverso de una matriz en **H**, y verificar que sin embargo no tiene elemento inverso en **M**.
[**sol:** En **H**: $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a & 1/a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$]